

第3讲分式方程

一、分式方程的概念

分母中含有未知数的方程叫分式方程。

【备注】【注意】

① 分式方程的重要特征是：(a) 是方程；(b) 方程含分母；(c) 分母里含有未知数。

② 分式方程和整式方程的区别就在于分母中是否有未知数：

分母中含有未知数的方程是分式方程，如 $\frac{1}{x} + 1 = 3$ ， $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{3}{x-1}$ ；

分母中不含有未知数的方程是整式方程，如 $\frac{2x}{3} = \frac{x-1}{2}$ ， $\frac{x+1}{b} - \frac{x-b}{a} = 1$ (x 是未知数)。

③ 分式方程和整式方程的联系：分式方程通过“去分母”转化为整式方程，然后求解。

🍌 举个“栗”子

栗子1

1. 下列关于 x 的方程是分式方程的为 ()。

A. $\frac{x+2}{5} - 3 = \frac{3+x}{6}$

B. $\frac{x+1}{7+a} = 3-x$

C. $\frac{x}{a} - \frac{a}{b} = \frac{b}{a} - \frac{x}{b}$

D. $\frac{(x-1)^2}{x-1} = 1$

【备注】考察分式方程的概念，注意分母中是否含有未知数

【答案】D

【解析】A 选项：整式方程。

B 选项：是关于 a 的分式方程，不是关于 x 的。

C 选项：整式方程。

D 选项：分式方程。

故选 D。

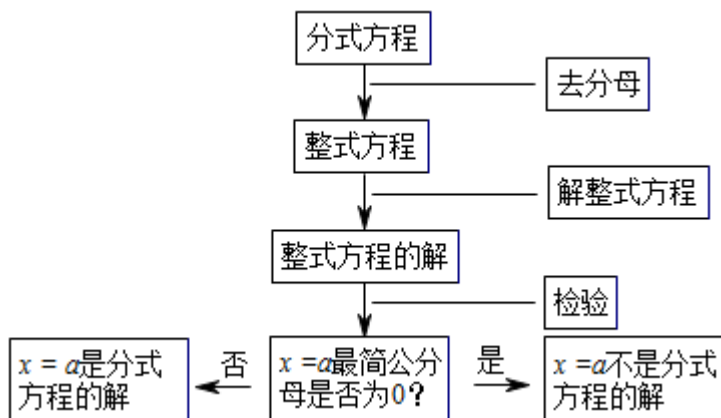
【标注】【知识点】分式方程的定义

二、解分式方程

(1) 解分式方程的基本思想

将分式方程转化为 **整式** 方程，转化的方法是方程两边都乘以 **最简公分母**，去分母。

(2) 解分式方程的一般步骤



① 在方程的两边同时乘以最简公分母，约去分母，得到整式方程；

② 解这个整式方程；

③ **检验**，将整式方程的解代入最简公分母，如果最简公分母的值 **不为0**，则整式方程的解是原分式方程的解；否则，这个解不是原分式方程的解，必须舍去。

栗子2

2. 方程 $\frac{1}{x-1} = \frac{5}{2x+1}$ 的解为 _____。

【备注】 按照步骤计算即可，比较基础

【答案】 $x = 2$

【解析】 方程两边都乘以 $(x-1)(2x+1)$ 得，

$$2x+1 = 5(x-1),$$

解得 $x = 2$ ，

检验：当 $x = 2$ 时， $(x-1)(2x+1) = (2-1) \times (2 \times 2 + 1) = 5 \neq 0$ ，

所以，原方程的解是 $x = 2$ 。

【标注】 **【知识点】** 解可化为一元一次方程的分式方程

3. 解方程： $\frac{2}{3} + \frac{x}{3x-1} = \frac{1}{9x-3}$ 。

【备注】 去分母时，注意最简公分母即可

【答案】 原方程无解。

【解析】 去分母得： $6x - 2 + 3x = 1$ ，

$$\text{解得：} x = \frac{1}{3}.$$

经检验： $x = \frac{1}{3}$ 是原方程的增根，故原方程无解。

【标注】 **【知识点】** 解可化为一元一次方程的分式方程

4. 解方程： $\frac{2x}{2x-1} + \frac{5}{1-2x} = 3$ 。

【备注】 当分母互为相反数时，最简公分母为其中一个即可，但要注意变成负号

【答案】 $x = -\frac{1}{2}$ 。

【解析】 原方程变形为 $\frac{2x}{2x-1} - \frac{5}{2x-1} = 3$ ，

方程两边同乘以 $(2x-1)$ ，得 $2x - 5 = 3(2x-1)$ ，

$$\text{解得 } x = -\frac{1}{2}.$$

检验：当 $x = -\frac{1}{2}$ 时， $2x-1 = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -2 \neq 0$ ，

$\therefore x = -\frac{1}{2}$ 是原方程的解，

$\therefore$ 原方程的 $x = -\frac{1}{2}$ 。

【标注】 **【知识点】** 解可化为一元一次方程的分式方程

5. 解分式方程： $\frac{x}{x-1} - 1 = \frac{3}{(x-1)(x+2)}$ 。

【备注】 当方程中出现常数项时，注意不要漏乘

【答案】 原方程无解。

【解析】 $\frac{x}{x-1} - 1 = \frac{3}{(x-1)(x+2)}$ ，

去分母，得： $x(x+2) - (x-1)(x+2) = 3$ ，

去括号，得： $x^2 + 2x - x^2 - x + 2 = 3$ ，

解得： $x = 1$ 。

检验：当 $x = 1$ 时， $(x-1)(x+2) = 0$ ，

$\therefore$ 原方程无解。

【标注】 **【知识点】** 解可化为一元一次方程的分式方程

6. 解方程：

$$(1) \frac{7}{x^2+x} + \frac{4}{x^2-x} = \frac{8}{x^2-1} .$$

【备注】分母可因式分解，先分解，再进一步判断最简公分母

【答案】(1) 无解 .

【解析】(1) 在方程两边同乘以 $x(x+1)(x-1)$ 得：

$$7(x-1) + 4(x+1) = 8x ,$$

$$3x - 3 = 0 ,$$

$$x = 1 ,$$

经检验 $x = 1$ 是方程增根，

故原方程无解 .

【标注】【知识点】解可化为一元一次方程的分式方程

三、分式方程的增根

分式方程的增根满足两个条件：

① 是整式方程的解；② 代入最简公分母为0 .

【备注】(1) 分式方程的增根是适合去分母后的整式方程但不适合原方程的根，必须舍去 .

(2) 增根产生的原因：

分式方程本身隐含分母不为0的条件，而去分母时方程两边同乘的最简公分母有可能为零，对于整式方程来说，求出的根成立，而对于原分式方程来说，分式无意义，所以这个根是原分式方程的增根 .

(3) 增根存在的可能性是使最简公分母为0的值 .

栗子4

7. 关于 x 的分式方程 $\frac{1}{x-2} + \frac{k}{x+2} = \frac{4}{x^2-4}$ 有增根 $x = -2$ ，则 k 的值是 _____ .

【备注】此类题目，第一步仍为去分母，再带入增根求出参数的值，而不是直接带入

【答案】-1

【解析】方程两边都乘 $(x+2)(x-2)$ ，都

$$x+2+k(x-2)=4 ,$$

∴原方程增根为 $x = -2$,
∴把 $x = -2$ 代入整式方程, 得 $k = -1$.

【标注】【知识点】分式方程的增根问题

栗子5

8. 若方程 $\frac{6}{(x+1)(x-1)} - \frac{m}{x-1} = 1$ 有增根, 则它的增根是____, $m =$ ____ .

【备注】注意增根可能为多个, 先去分母, 再带入增根计算

【答案】 $x = 1; 3$

【解析】因为使得分式方程分母等于0的未知数的值, 是方程的增根, 所以方程

$$\frac{6}{(x+1)(x-1)} - \frac{m}{x-1} = 1$$

的增根是 $x = \pm 1$, 去分母得 $6 - m(x+1) = (x+1)(x-1)$, 把增根 $x = 1$ 分别代入此方程可得 $m = 3$.

当 $x = -1$ 时, 不符合题意 .

考点: 分式方程的增根 .

【标注】【知识点】分式方程的增根问题

四、分式方程无解

分式方程无解包含两种情况:

- ① 分式方程的根是 增根 ;
- ② 将分式方程化为整式方程后, 整式方程 无解 .

栗子6

9. 若关于 x 的分式方程 $\frac{m}{x-1} + \frac{3}{1-x} = 1$ 无解, 则 m 的值是____ .

【备注】去分母整理成一元一次方程, 再把增根带入

【答案】3

【解析】去分母, 得 $m - 3 = x - 1$, $x = m - 2$.

∴关于 x 的分式方程无解,

$\therefore$ 最简公分母 $x-1=0$,

$\therefore x=1$,

当 $x=1$ 时, 得 $m=3$,

即 m 的值为3.

【标注】【知识点】分式方程的无解问题

10. 已知关于 x 的方程 $\frac{1}{x-2} + \frac{a}{x^2-4} = \frac{3}{x+2}$ 无解, 求 a 的值.

【备注】与第9题方法相同, 但注意本题增根有两个

【答案】 -4或-12.

【解析】解分式方程得:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-2} + \frac{a}{(x-2)(x+2)} &= \frac{3}{x+2} \\ x+2+a &= 3(x-2) \\ x+2+a &= 3x-6, \\ 2x &= a+8 \\ x &= \frac{a+8}{2}\end{aligned}$$

$\therefore$ 分式方程无解,

$\therefore x = \frac{a+8}{2}$ 为增根,

$\therefore \frac{a+8}{2} = 2$ 或 $\frac{a+8}{2} = -2$,

$a+8=4$, $a+8=-4$,

$a=-4$, $a=-12$.

综上: $a=-4$ 或 -12 .

【标注】【知识点】由分式方程的解确定参数

栗子7

11. 若关于 x 的方程 $\frac{mx}{x-2} - 1 = \frac{-4}{2-x}$ 无解, 则 m 的值为_____.

【备注】重点题, 去分母整理成一元一次方程后, 会发现 x 的系数仍含有参数, 故需要讨论第二类, 一元一次方程无解问题, 需要带学生总结无解问题的处理技巧, 可通过练习册巩固

【答案】 2或1

【解析】 $\frac{mx}{x-2} - 1 = \frac{-4}{2-x}$,
 $mx - x + 2 = 4$,

$$mx - x = 2,$$

$$(m-1)x = 2,$$

当 $m-1=0$ ，即 $m=1$ 时，

无解。

当 $m-1 \neq 0$ ，即 $m \neq 1$ 时，

$$x = \frac{2}{m-1}.$$

$$\therefore \frac{2}{m-1} = 2, m = 2.$$

【标注】【知识点】分式方程的无解问题

独步天下

12. 若关于 x 的分式方程 $\frac{1}{x+1} + \frac{a}{x-2} = \frac{2a}{x^2-x-2}$ 无解，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【备注】 本题从两个角度出发，即有两个增根和一元一次方程无解，故有三个答案

【答案】 -1 或 0 或 $-\frac{3}{2}$ 。

【解析】 两边同时乘以 $(x-2)(x+1)$ ，

$$x-2+a(x+1)=2a,$$

$$(a+1)x=a+2,$$

① 当 $a=-1$ 时，无解，

② 当 $a \neq -1$ 时， $x = \frac{a+2}{a+1} = 1 + \frac{1}{a+1}$ ，

$$\therefore 1 + \frac{1}{a+1} = -1 \text{ 或 } 1 + \frac{1}{a+1} = 2,$$

$$\therefore a = -\frac{3}{2} \text{ 或 } a = 0,$$

综上所述， $a = -1$ 或 0 或 $-\frac{3}{2}$ 。

故答案为 -1 或 0 或 $-\frac{3}{2}$ 。

【标注】【知识点】分式方程的无解问题

五、含字母参数的分式方程

1. 已知方程的解，求参数的值

栗子8

13. 已知 $x=3$ 是分式方程 $\frac{kx}{x-1} - \frac{2k-1}{x} = 2$ 的解，那么实数 k 的值为_____。

【备注】直接带入计算即可

【答案】2

【解析】将 $x=3$ 代入方程 $\frac{kx}{x-1} - \frac{2k-1}{x}$ 中，得 $\frac{3k}{3-1} - \frac{2k-1}{3} = 2$ ，
化简，得 $9k - 4k = 10$ ，
解得 $k = 2$ 。

【标注】【知识点】由分式方程的解确定参数

2. 已知方程解的范围，求参数取值范围

栗子9

14. 关于 x 分式方程 $\frac{m}{x-1} - \frac{3}{x-1} = 1$ 的解为正数，则 m 的取值范围是（ ）。

A. $m > 0$ B. $m > 2$ C. $m > 2$ 且 $m \neq 3$ D. $m \neq 1$

【备注】解为正数，先求解再列不等式即可，但注意此类题目一定要考虑分母不为零

【答案】C

【解析】去分母得 $m - 3 = x - 1$ ，
 $\therefore x = m - 2$ ，
由分式方程的解为正数，
得到 $m - 2 > 0$ ，
又 $m - 2 \neq 1$ ，
 $\therefore m > 2$ 且 $m \neq 3$ 。

【标注】【知识点】由分式方程的解确定参数

15. 已知关于 x 的分式方程 $\frac{x+k}{x+1} - \frac{k}{x-1} = 1$ 的解为负数，则 k 的取值范围是_____。

【备注】与第14题技巧相同，注意负数小于零即可

【答案】 $k > \frac{1}{2}$ 且 $k \neq 1$

【解析】去分母得： $(x+k)(x-1) - k(x+1) = x^2 - 1$ ，
去括号得： $x^2 - x + kx - k - kx - k = x^2 - 1$ ，

移项合并得： $x = 1 - 2k$ ，

根据题意得： $1 - 2k < 0$ ，且 $1 - 2k \neq \pm 1$ ，

解得： $k > \frac{1}{2}$ 且 $k \neq 1$ 。

【标注】【知识点】由分式方程的解确定参数

16. 若关于 x 的方程 $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} = \frac{m}{x^2-1}$ 的解为非负数，求 m 的取值范围。

【备注】解答题，注意过程书写

【答案】 $m \geq 1$ 且 $m \neq 4$ 。

【解析】 $\because \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} = \frac{m}{x^2-1}$ ，

两边同乘以 (x^2-1) 得， $x-1+2(x+1)=m$ ，

化简，得 $x-1+2x+2=m$ ，

解得， $x = \frac{m-1}{3}$ ，

$\because$ 分式方程的解为非负数，

$\therefore \frac{m-1}{3} \geq 0$ ，

$\therefore m \geq 1$ ，

$\therefore \frac{m-1}{3} \neq \pm 1$ ，

$\therefore m \neq 4$ 且 $m \neq -2$ 。

综上所述， m 的取值范围是 $m \geq 1$ 且 $m \neq 4$ 。

【标注】【知识点】由分式方程的解确定参数